

Universidad De Atacama

Facultad De Ingeniería / Departamento De Matemática

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

GUÍA 6

Profesores: Jaime Arrué A. - Hugo S. Salinas. Primer Semestre 2008

1. El tiempo que un pasajero invierte esperando en un punto de revisión de un aeropuerto es una variable aleatoria con media de 8.2 minutos y desvación estándar (d.e.) de 1.5 minutos. Suponer que se observa una muestra aleatoria (m.a.) de $n = 49$ pasajeros. Encontrar la probabilidad de que el tiempo de espera promedio en la fila para estos clientes sea

   a) Menor que 10 minutos.

   b) Entre 5 y 10 minutos.

   c) Menor que 6 minutos.

2. Se toma una m.a. de tamaño $n_1 = 16$ de una población normal que tiene una media de 75 y una d.e. de 8. De otra población normal se toma una m.a. de tamaño $n_2 = 9$, esta población tiene una media de 70 y una d.e. de 12. Sean $\overline{X_1}$ y $\overline{X_2}$ las medias de cada muestra, respectivamente. Encontrar

   a) La probabilidad de que $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ sea mayor que 4.

   b) La probabilidad de que $3.5 \leq \overline{X_1} - \overline{X_2} \leq 3.5$.

3. Sea X una variable aleatoria (v.a.) que tiene una dstribución uniforme en $(0, 1)$. Suponer que se toma una m.a. de $n = 12$ observaciones de esta distribución. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de $\overline{X} - 6$. Encontrar la media y la varianza de esta cantidad.

4. Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo está distribuido aproximadamente de manera normal, y que tiene una d.e. $\sigma_0 = 0.001$ mm. Una m.a. de 15 aniloos tiene un díametro promedio de $\overline{x} = 74.036$ mm.

   a) Contruir un interavalo de confianza (IC) bilateral del 99 % para el diámetro promedio del anillo.

   b) Construir un límite inferior de confianza del 95 % para el diámetro promedio del anillo.

   R: a) $74.0353 \leq \mu \leq 74.0367$ b) $74.0356 \leq \mu$

5. Un ingeniero civil analiza la resistencia a la compresnsión del concreto. La resistencia está distribuida aproximadamente de manera normal, con una varianza $\sigma^2 = 1000$ (psi)^2. Al tomar una m.a. de 12 especímenes, se tiene que $\overline{x} = 3250$ psi.

   a) Contruir un IC bilateral del 95 % para la resistencia a la comprensión promedio.

   b) Contruir un IC bilateral del 99 % para la resistencia a la comprensión promedio. Comparar el ancho de este IC con el ancho encontrado en el inciso a).

R: a) $3232.11 \leq \mu \leq 3267.89$ b) $3226.49 \leq \mu \leq 3273.51$

6. Se utilizan dos máquinas para llenar botellas de plástico con detergente para máquinas lavaplatos. Se sabe que las d.e. del volumen de llenado son $\sigma_1 = 0.10$ onzas de líquido y $\sigma_2 = 0.15$ onzas de líquido para las dos máquinas, respectivamente. Se toman dos m.a., $n_1 = 12$ botellas de la máquina 1 y $n_2 = 10$ botellas de la máquina 2. Los volúmenes promedio de llenado son $\overline{x_1} = 30.87$ onzas de líquido y $\overline{x_2} = 30.68$ onzas de líquido.

    a) Contruir un IC bilateral del 90 % para la diferencia entre las medias del volumen de llenado.

    b) Contruir un IC bilateral del 95 % para la diferencia entre las medias del volumen de llenado. Comparar el ancho de este intervalo con el ancho del calculado en el inciso a).

    c) Contruir un IC superior del 95 % para la diferencia de medias del volumen de llenado.

    R: a) $0.0984 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 0.2816$ b) $0.0812 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 0.2988$ c) $\mu_1 - \mu_2 \leq 0.2816$

7. Se prueban dos fórmulas diferentes de un combustible oxigenado para motor en cuanto al octanaje. La varianza del octanaje para la fórmula 1 es $\sigma_1^2 = 1.5$, mientras que para para la fórmula 2 es $\sigma_2^2 = 1.2$. Se prueban dos m.a. de tamaño $n_1 = 15$ y $n_2 = 20$. Los octanajes promedios observados son $\overline{x_1} = 89.6$ y $\overline{x_2} = 92.5$. Construir un IC bilateral del 95 % para la diferencia en el octanaje promedio.

    R: $-3.68 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2.16$

8. Considerar la situación sobre pruebas de octanaje descrita en el ejercicio 7. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para cada población si se desea tener una confianza del 95 % de que el error al estimar la diferencia entre las medias de octanaje se menor que uno?.

    R: $n_1 = n_2 = 11$

9. Un ingeniero hace pruebas con la resistencia a la comprensión del concreto. Para ello examina 12 especímenes y obtiene los siguientes datos: 2216, 2237, 2249, 2204, 2225, 2301, 2281, 2263, 2318, 2255, 2275 y 2295.

    a) Contruir un IC bilateral del 95 % para la resistencia promedio.

    b) Contruir un IC inferior del 95 % para la resistencia promedio.

    R: a) $2237.31 \leq \mu \leq 2282.52$ b) $2241.47 \leq \mu$

10. Un ingeniero de control de calidad midió el espesor de la pared de 25 botellas de vidrio de dos litros. La media muestral es $\overline{x} = 4.05$ mm, mientras que la d.e. muestral es $s = 0.08$ mm. Encontrar un IC del 90 % para la media del espesor de la pared de las botellas.

    R: $4.029 \leq \mu$

11. Un artículo publicado en el *Journal of Composite Materials* (diciembre de 1989, Vol. 23, pág. 1200) describe el efecto de la pérdida de láminas sobre la frecuencia natural, de vigas formadas por varias láminas. Se sujetaron cinco vigas con pérdida de láminas a varias cargas, y las frecuencias resultantes fueron las siguientes (en Hz): 230.66, 233.05, 232.58, 229.48 y 232.58. Encontrar un IC bilateral del 90 % para la frecuencia natural.

    R: $230.21 \leq \mu \leq 233.13$

12. Se investiga el diámetro de las varillas de acero fabricadas en dos diferenctes máquinas de extrusión. Para ello se toman dos m.a.s. de tamaños $n_1 = 15$ y $n_2 = 18$; las medias y las varianzas muestrales son $\overline{x_1} = 8.73$, $s_1^2 = 0.35$, $\overline{x_2} = 8.68$, $s_2^2 = 0.40$, respectivamente. Suponer que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Contruir un IC bilateral del 95 % para la diferencia en el diámetro promedio de la varilla.

    R: $-0.388 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 0.488$

13. Un científico de la computación está investigando la utilidad de dos lenguajes de diseño para mejorar las tareas de programación. Se pide a doce programadores expertos, familiarizados con los dos lenguajes, que codifiquen una función estándar en ambos lenguajes, anotando el tiempo, en minutos, que requieren para hacer esta tarea. Los datos obtenidos son los siguientes:

	Programador											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lenguaje 1	17	16	21	14	18	24	16	14	21	23	13	18
Lenguaje 2	18	14	19	11	23	21	10	13	19	24	15	20

    Encontrar un IC del 95 % para la diferencia en los tiempos de codificación promedio. ¿Existe algo que indique una preferencia por alguno de los lenguajes?.

    R: $-1.217 \leq \mu_D \leq 2.551$. Ninguna indicación.

ANEXO

Teorema 1. Sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ v.a.s. distribuidas normal e independientementes, con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Entonces, la v.a.

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2$$

tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \qquad 0 < x < \infty,$$

y se dice que sigue una distribución chi-cuadrado con k grados de libertad, lo que se anota como $X \sim \chi_k^2$.

Teorema 2. Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ v.a.s. Chi-cuadrado independientes con $k_1, k_2, \ldots, k_p$ grados de libertad, respectivamente. Entonces, la v.a.

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p$$

sigue una distribución Chi-cuadrado con grados de libertad igual a $k = \sum_{i=1}^{p} k_i$.

Teorema 3. Sea Z una v.a. con distribución normal estándar y V una v.a. Chi-cuadrado con k grados de libertad. Si Z y V son independientes, entonces la v.a.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$$

tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(\frac{x^2}{k} + 1\right)^{-(k+1)/2}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

y se dice que sigue la distribución t de Student con k grados de libertad, y se anota $X \sim t_k$.

Teorema 4. Sean W e Y v.a.s. Chi-cuadrado independientes con grados de libertad, n y m, respectivamente. Entonces la v.a.

$$F = \frac{W/n}{Y/m}$$

tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{n/2-1} \left[\left(\frac{n}{m}\right) x + 1\right]^{-(n+m)/2}, \qquad 0 < x < \infty,$$

y se dice que sigue la distribución F con n grados de libertad en el numerador, y m grados de libertad en el denominador. Usualmente, esto se anota como $X \sim F_{n,m}$.